MATEMÁTICAS II

EXAMEN OFICIAL REALIZADO EN ESPAÑA EN LA CONVOCATORIA ORDINARIA PCE UNEDASISS 2024

PARTE TEST

Deben responderse 10 preguntas del total de tipo test. Cada respuesta correcta suma 0.5 puntos. Las respuesta incorrectas penalizan 0.1 puntos. No responder no suma ni resta puntuación.

1. Todo sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

a) Puede tener exactamente dos soluciones

b) Si tiene un número par (mayor que 0) de soluciones, tiene infinitas

c) Ninguna de las anteriores

2. Si A,B son matrices reales tales que es posible formar el producto AB y, además, rango (A) = 2 y rango (B) = 3, entonces rango (AB) es:

a) 6

b) 3

c) Ninguna de las anteriores

3. Todo sistema de ecuaciones lineales que tiene más ecuaciones que incógnitas:

a) Es incompatible

b) Es compatible indeterminado

c) Ninguna de las anteriores

4. Si A es una matriz real m x n (con m distinto de n) y B es otra matriz tal que existen los productos AB y BA:

a) Entonces B es una matriz n x n

b) Entonces B es una matriz n x m

c) Ninguna de las anteriores

5. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$

a) Puede haber un sistema generador con cuatro vectores

b) Los elementos de todo sistema generador forman una base

c) Ninguna de las anteriores

6. Dados los puntos del espacio A (1,7,11) y B (4,-2,17), otro punto alineado con ellos P (a,b,c) y tal que está a la mitad de distancia de A que de B, cumple:

a) $a + b + c = 19$

b) $a \cdot b \cdot c < 0$

c) Ninguna de las anteriores

7. El valor de $k \in \mathbb{R}$ para el cual los vectores u = (k,1) y v = (6,3) son linealmente dependientes es:

a) Puede ser negativo

b) Es impar

c) Ninguna de las anteriores

8. La integral definida

$$I = \int_{-5}^{5} \frac{x^{2023}}{x^{2024}+2}\,dx$$

a) Cumple que I > 1

b) Cumple que I < 1

c) Ninguna de las anteriores

9. La integral

$$\int_{0}^{\pi} (x + senx)\,dx$$

a) Es menor o igual a cero

b) Es mayor que $\frac{\pi^2}{2}$

c) Ninguna de las anteriores

10. La función $f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 7$

a) Es decreciente en el intervalo (0,2)

b) Es creciente en el intervalo (1,2)

c) Ninguna de las anteriores

11. El límite

$$\lim_{x \to 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$$

a) No existe

b) Es igual a 0

c) Ninguna de las anteriores

12. Sean A,B dos sucesos tales que la probabilidad de que ocurran simultáneamente es P = 1/4 . Entonces, la probabilidad de que al menos uno de los dos no ocurra es:

a) Es menor que 0.4

b) Es mayor que 0.6

c) Ninguna de las anteriores

13. Se lanzan simultáneamente 4 monedas. La probabilidad de obtener, al menos, una cara:

a) Es mayor a 0.8

b) Es menor que 0.3

c) Ninguna de las anteriores

14. Sean A,B,C sucesos arbitrarios de un experimento aleatorio. El suceso "ocurren exactamente dos sucesos de entre los A,B,C" se expresa:

a) $(A \cup B) \cap (A \cup C) \cap (B \cup C)$

b) $(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C)$, donde la barra denota el suceso complementario

c) Ninguna de las anteriores

15. Sean A,B dos sucesos tales que p(A) = 2/5, p(B) = 1/3 y $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{1}{3}$, donde la barra denota el suceso complementario. Entonces:

a) $0{,}6 \leq p(A \cup B) \leq 0{,}7$

b) $0{,}1 \leq p(A \cap B) \leq 0{,}2$

c) Ninguna de las anteriores

PARTE DESARROLLO

Escoger una opción (5 puntos).

OPCIÓN 1

1. Estudiar la existencia de inversa, según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$, para la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix}$$

En el caso a = 1/2 . Calcular la traza (suma de los elementos de la diagonal) de A^{-1}

SOLUCIÓN

Para que la matriz A tenga inversa su determinante ha de ser distinto de 0. La estrategia es calcular el determinante y ver para qué valores de a se anula, y excluirlos.

$$|A| = a^3 - a^2 - a + 1$$

Este determinante se anula si $a = +1$ como solución doble y $a = -1$ simple. Esto significa que

$$|A| = (a-1)^2(a+1)$$

Por tanto, la matriz tendrá inversa si $A \neq \pm 1$

Para $a = 1/2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Por la expresión del determinante de A sabemos que

$$|A| = (1/2 - 1)^2(1/2 + 1) = 3/8$$

Nos piden la traza de la inversa. Para calcular la inversa necesitamos el determinante de la matriz y hacer la adjunta traspuesta. Como solamente queremos los elementos de la diagonal principal, estos no sufren ningún cambio debido a la trasposición o el cambio de signo al hacer esta operación.

El primer elemento de la matriz inversa se obtendrá haciendo el menor que resulta de tachar la primera fila y columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{vmatrix} = 3/4$$

El segundo elemento de la diagonal:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{vmatrix} = 3/4$$

Finalmente, el tercero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 1 \end{vmatrix} = 1/2$$

Multiplicamos estos números por la inversa del determinante, obteniendo que los elementos de la diagonal de la inversa de A, en orden descendente, son:

$$\frac{8}{3} \cdot \frac{3}{4} = 2$$

$$\frac{8}{3} \cdot \frac{3}{4} = 2$$

$$\frac{8}{3} \cdot \frac{1}{2} = 4/3$$

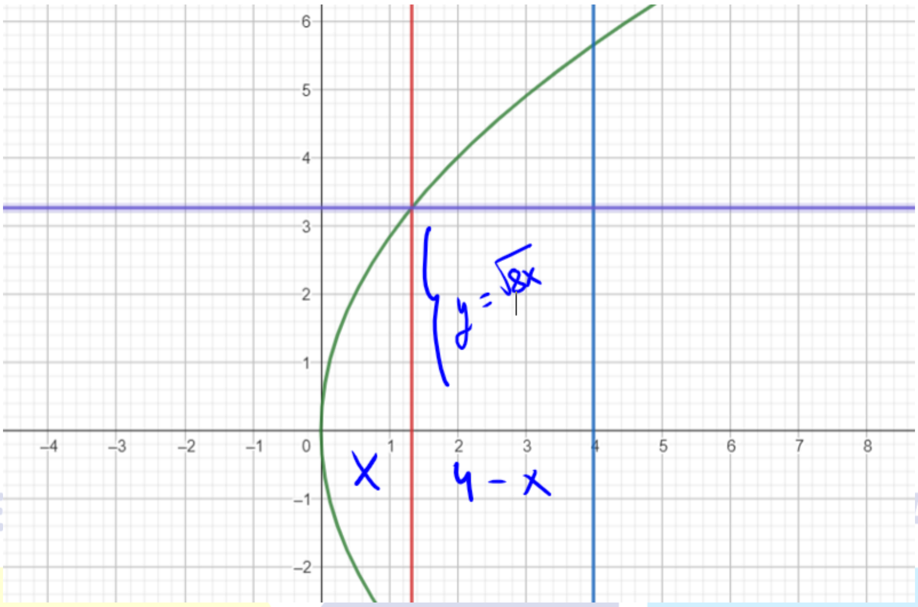
Por lo que la traza es:

$$tr(A^{-1}) = 2 + 2 + 4/3 = 16/3$$

2. Calcular las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede inscribirse con su base en el eje horizontal y limitado por las curvas $y^2 = 8x$, $x = 4$. ¿Cuál es el área?

<u>SOLUCIÓN</u>

La gráfica del problema es:



Si queremos que la altura sea la imagen de la función $y = \sqrt{8x}$ entonces la base del rectángulo tiene que ser $4 - x$

El área del rectángulo en función de x es:

$$A(x) = (4 - x)\sqrt{8x}$$

La derivada de la función es:

$$A'(x) = 4 \cdot \sqrt{8x} + (4 - x)\sqrt{8}\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-\sqrt{2}(3x - 4)}{\sqrt{x}}$$

$$A'(x) = 0 \rightarrow x = 4/3$$

Comprobemos si este punto es un máximo con el criterio de la segunda derivada:

$$A''(x) = \frac{-3x + 4}{\sqrt{2}x^{3/2}}$$

Que es un número negativo para $x = 4/3$, por lo que se trata de un máximo.

La base del rectángulo es:

$$4 - 4/3 = 8/3$$

Y la altura:

$$y = \sqrt{8 \cdot 4/3} = 4\sqrt{2/3}$$

Por lo que el área pedida es:

$$A(4/3) = \frac{32\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$$

OPCIÓN 2

3. Dados los planos $\pi_1 = 2x - y + z = 3$; $\pi_2 = x - y + z = 2$, $\pi_3 = 3x - y - az = b$, determinar los valores $a, b \in \mathbb{R}$ para que definan una única recta y obtener un vector director de la misma.

SOLUCIÓN

Para que el sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas que se forma al intersecar los tres planos satisfaga la condición del enunciado se ha de cumplir que el rango de la matriz del sistema y de la matriz ampliada sean 2.

La matriz del sistema es:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -a \end{pmatrix}$$

El determinante de la matriz es:

$$|A| = a + 1$$

Para que sea de rango 2 ha de ser condición necesaria que el determinante se anule, es decir, que $a = -1$

Por lo que $a = -1$ hace que $rg(A) = 2$ (claramente no es rango 1).

Veamos ahora el rango de la matriz ampliada para $a = -1$

$$A* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & b \end{pmatrix}$$

Analizamos los tres menores que contienen a la última columna:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & b \end{vmatrix} = 0$$

Porque la primera columna es proporcional a la segunda.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & b \end{vmatrix} = b - 4$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & b \end{vmatrix} = -b + 4$$

Que se anulan simultáneamente cuando $b = 4$, por lo que los tres planos se cortan en una única recta si $a = -1, b = 4$

Finalmente, para hallar el vector director sabemos que una de las tres ecuaciones depende de las otras dos. Podemos tachar la última y parametrizar $z = \lambda$

$$\begin{gathered} 2x - y = 3 - \lambda \\ x - y = 2 - \lambda \end{gathered}$$

Si restamos la primera con la segunda

$$x = 1$$

Y sustituyendo,

$$y = \lambda - 1$$

Finalmente,

$$(x, y, z) = (1, \lambda - 1, \lambda) = (1, -1, 0) + \lambda(0,1,1)$$

Por lo que el vector director es $(0,1,1)$.

4. Se reparten 5 papeletas de una tira numerada del 1 al 40. Calcular la probabilidad de que exactamente tres de las papeletas estén numeradas con múltiplos de 10 (no es necesario dar el resultado con decimales basta con fracciones).

SOLUCIÓN

Hay 4 números del 1 al 40 que son múltiplos de 10. Las papeletas no se pueden repetir y en una tanda de 5 debemos tener 3 múltiplos de 10 y 2 no múltiplos de 10.

Cuando obtengamos el primer múltiplo de 10, habrá uno menos y una posibilidad a descartar.

La probabilidad de sacar 3 múltiplos de 10 y después 2 no múltiplos de 10:

$$\frac{4}{40}\cdot\frac{3}{39}\cdot\frac{2}{38}\cdot\frac{36}{37}\cdot\frac{35}{36}=\frac{1}{10}\cdot\frac{6}{38}\cdot\frac{35}{37}$$

Hay que tener en cuenta que hay

$$\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!\cdot 2!}=10\ combinaciones$$

Finalmente,

$$Probabilidad=\frac{1}{10}\cdot\frac{6}{39\cdot 38}\cdot\frac{35}{37}\cdot 10=\frac{6}{39\cdot 38}\cdot\frac{35}{37}$$