MATEMÁTICAS II

EXAMEN OFICIAL REALIZADO EN ESPAÑA EN LA CONVOCATORIA PCE UNEDASISS 2023

Parte 1 – Bloque test. Bloque de 10 preguntas. Debe elegir 10 de las 15 preguntas. Cada acierto suma 0,5 puntos. Cada error resta 0,1 puntos. Solo hay que una respuesta correcta por cada cuestión

1. En el espacio tridimensional se consideran el plano $\pi: 3x - 2y - z = 2$ y la recta

$$r: \begin{cases} 2x + 2y + 2z = 1 \\ x + 3y - 3z = 3 \end{cases}$$

Entonces

a) El plano y la recta se cortan perpendicularmente

b) La recta está contenida en el plano

c) Ninguna de las otras dos

2. Toda A matriz real cuadrada tal que A^2 = A, cumple que:

a) det (A) > 0

b) Si A es regular, A = I (la matriz identidad)

c) Ninguna de las anteriores

3. La distancia del punto (2,1,3) a la recta x = 2y = 3z es:

a) Mayor que 1

b) Menor que 1

c) Ninguna de las otras dos

4. Se tienen dos sucesos A y B con probabilidades respectivas p(A) = 0,6 y p(B) = 0,7. Entonces:

a) Los sucesos A y B son tal que AUB es necesariamente el espacio total

b) Los sucesos A y B pueden ser disjuntos

c) Ninguna de las otras dos

5. El límite L = $\lim_{x \to 0^+} x^n \cdot \ln x$ con n>0:

a) Tiene un valor $L < 0$, independiente de n

b) No existe

c) Ninguna de las otras dos

6. Para toda f: [a,b] → $\mathbb{R}$ función continua en [a,b] y tal que f(a) f(b) $>$ 0, se cumple que:

a) Existe algún c∈(a,b) tal que f(c) = 0

b) No necesariamente existe algún c ∈(a,b) tal que f(c) = 0

c) Ninguna de las otras dos.

7. Un dado no trucado se lanza dos veces. ¿Cuál es la probabilidad p de sacar un 2 en la primera tirada y no sacar el 4 en la segunda?

a) 0,1 < p < 0,15

b) 0,15 < p < 0,2

c) Ninguna de las otras dos.

8. Sea A la matriz real (con a,b,c arbitrarios)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

Entonces, se cumple:

a) Si b = c, entonces rango (A) = 1

b) Si b = 0, entonces rango (A) = 2

c) Ninguna de las anteriores

9. La función

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

a) Es creciente en todo su dominio

b) Es decreciente en $(-\infty, 0)$

c) Ninguna de las otras dos

10. Toda matriz real A cuadrada invertible cumple que:

a) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$, donde A^t es la traspuesta

b) $\det(A^{-1}) = -\det(A)$

c) Ninguna de las anteriores

11. Sean las rectas r: (0,-1,1)+a(1,3,-4) y s: (1,0,0) + b(1,0,1) en el espacio:

a) Son secantes

b) La distancia entre ellas es $\sqrt{43} / 43$

c) Ninguna de las otras dos

12. Se tiene un bote con caramelos de colores: rojo, amarillo, verde, azul y naranja. Se sabe que la probabilidad de sacar al azar un caramelo rojo es de 0,2, la de sacar uno amarillo es 0,15 ,uno verde 0,1 y uno azul 0,3. Si se sacan 60 caramelos de la bolsa, ¿cuántos esperaríamos que haya de color naranja (denotamos ese número por N)?

a) 8 ≤ N ≤ 14

b) 13 ≤ N ≤ 18

c) Ninguna de las otras dos

13. Si la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1/2} & \boldsymbol{\lambda} \\ -\sqrt{\mathbf{3}}/\mathbf{2} & -\mathbf{1/2} \end{pmatrix}$$

Es ortogonal, entonces:

a) $\lambda > 0$

b) $\lambda < 0$

c) Ninguna de las anteriores

14. Se pregunta a 50 consumidores si les gustan dos productos A y B. Hay 37 personas a las que les gusta el producto A y, de ellas, hay 25 a las que también les gusta el producto B. Hay 3 personas a las que no les gusta ninguna de los dos. Se elige al azar una de las personas entre las que sí les gusta B. ¿Cuál es la probabilidad p de que no le gusta A?

a) $0{,}25 < p < 0{,}3$

b) $0{,}2 < p < 0{,}25$

c) Ninguna de las otras dos.

15. Para toda f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ función continua en [a,b] y derivable en (a,b) se cumple que:

a) Existe un $\theta \in (a,b)$ tal que $f(b) = f'(\theta)(b-a)$

b) Existe un $\theta \in (a,b)$ tal que $f(b) = f(a) + f'(\theta)(b-a)$

c) Ninguna de las otras dos

Parte 2 - Bloque de desarrollo. Elija una sola opción y conteste a los problemas en hojas separadas

Opción 1

1.

a) Estudiar la posición relativa en el espacio de los planos π_1 y π_2, con ecuaciones respectivas:

$$\boldsymbol{\pi_1: x + 2y - z = 3}$$
$$\boldsymbol{\pi_2: ax + (a-2)y + 2z = 4}$$

En función del parámetro real a $\epsilon\mathbb{R}$

b) Determinar, en el caso en que los planos se intersecten a lo largo de una recta, un vector director de la misma.

a) En primer lugar, generaremos una matriz con los coeficientes de las dos ecuaciones de los planos, esta matriz será la matriz de coeficientes A. Para, a partir de su rango, determinar la dependencia o independencia de los vectores normales de ambos planos.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ a & (a-2) & 2 \end{pmatrix}$$

Para estudiar el rango de esta matriz en función de a calculamos los distintos menores de orden dos que contiene y los igualamos a cero.

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & (a-2) \end{vmatrix} = a - 2 - 2a = -a - 2$, igualamos a cero $\;-a - 2 = 0 \;\; \rightarrow a = -2.$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ a & 2 \end{vmatrix} = a + 2$, igualamos a cero $a + 2 = 0 \;\; \rightarrow a = -2.$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ (a-2) & 2 \end{vmatrix} = a + 2$, igualamos a cero $a + 2 = 0 \;\; \rightarrow a = -2.$

Luego para todo valor real distinto de menos dos el rango de la matriz A es dos. Por consiguiente, los vectores son linealmente independientes, es decir los planos se cortan en una recta.

Por otra parte, para $a = -2$

$$\frac{1}{-2} = \frac{2}{-4} = \frac{-1}{2} \neq \frac{3}{4}.$$

Al no ser proporcionales con los términos independientes, podemos concluir que para

$a = -2$ los planos son paralelos.

b) Podemos obtener dicho vector director como el producto vectorial entre los vectores normales de ambos planos, esto es:

$$\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ a & (a-2) & 2 \end{vmatrix} = (2+a)\hat{\imath} - (2+a)\hat{\jmath} - (2+a)\hat{k}.$$

Es decir, el vector director de la recta que se forma de la intersección de los planos es

$$(2+a, -2-a, -2-a).$$

Un vector concreto, por ejemplo sería el $(2, -2, -2)$.

2. Dada la función real

$$\boldsymbol{f(x) = \ln\left(\sqrt{4 - x^2}\right)}$$

(donde ln denota el logaritmo natural o neperiano), se pide:

a) Representar gráficamente la curva y = f(x), discutiendo razonadamente su dominio, asíntotas, intervalos de crecimientos y extremos relativos

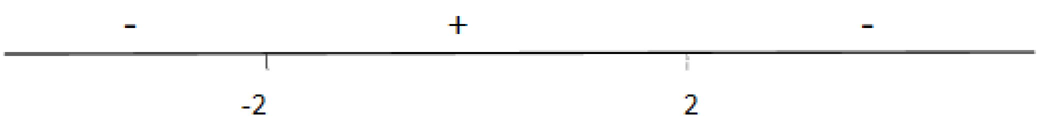
b) Determinar las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de la función en los puntos donde corta al eje de abscisas. ¿Cuál es el ángulo que forma cada una de estas rectas tangente con el eje de las x?

a) En primer lugar, calcularemos el dominio. Puesto que es una función logarítmica el argumento del logaritmo debe ser siempre mayor que cero. Por otra parte, el argumento de la raíz también debe ser positivo. Estudiamos el signo de dicho argumento.

Comenzamos igualando a cero, esto es

$$x^2 + 4 = 0 \text{ de donde } x = \pm 2.$$

Pongamos estas raíces sobre la recta real y hagamos un estudio del signo en cada intervalo, obtenemos:



Luego el dominio de la función es el intervalo $(-2, 2)$.

Hagamos ahora un estudio de las asíntotas:

Asíntotas verticales:

Para calcular dichas asíntotas calcularemos los límites en los puntos donde empieza y acaba el dominio, esto es:

$\lim_{x \to 2} \ln(\sqrt{4-x^2})$ = -∞

$\lim_{x \to -2} \ln(\sqrt{4-x^2})$ = -∞

Luego no tengo asíntotas verticales.

Asíntotas horizontales:

Calculamos los límites al infinito,

$\lim_{x \to \infty} \ln(\sqrt{4-x^2})$

$\lim_{x \to -\infty} \ln(\sqrt{4-x^2})$

Dado que serían logaritmos de un argumento negativo, ambos límites no existen.

Asíntotas oblicuas:

Tenemos que calcular m y n para obtener la recta de la asíntota oblicua

$m = \lim_{x \to \infty} \ln(\sqrt{4-x^2})/x$

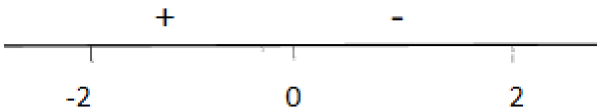
$m = \lim_{x \to -\infty} \ln(\sqrt{4-x^2})/x$

Análogo a lo anterior, este límite no se puede calcular.

Hallemos ahora los extremos relativos, crecimiento y decrecimiento. Para ello calculamos la primera derivada de la función, esto es,

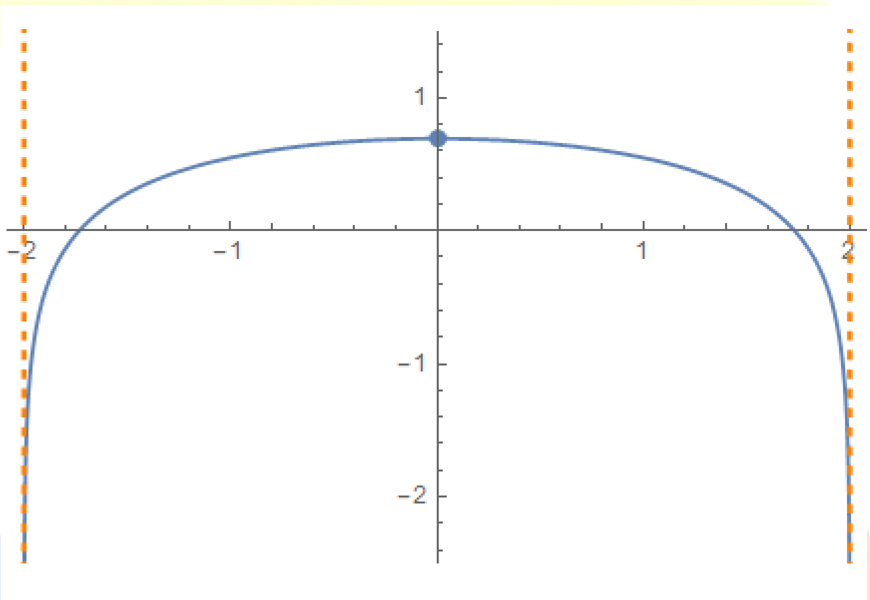
$$f'(x) = -\frac{x}{4-x^2}.$$

La igualamos a cero, obteniendo que esta derivada solo se anula en x=0. Realizamos un estudio del signo en los intervalos, tal y como se muestra:



De modo que tenemos un máximo en $(0, ln(2))$ y la función es decreciente en (-2,0) y creciente en (2,0).

El esbozo quedaría de la siguiente forma:



b) Hallemos en primer lugar los cortes con el eje de las X , para ello tomamos y= 0, esto es $0 = \ln\left(\sqrt{4-x^2}\right)$, tomamos exponenciales y tenemos

$e^0 = \sqrt{4-x^2}$, es decir $1 = \sqrt{4-x^2}$, luego $x = \pm\sqrt{3}$.

Para calcular las pendientes en ese punto basta con sustituir dichos valores en la derivada, de modo que

$$f'(\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{4-3} = -\sqrt{3}$$

$$f'(-\sqrt{3}) = -\frac{-\sqrt{3}}{4-3} = \sqrt{3}$$

Luego la pendiente en $(\sqrt{3}, 0)$ es $-\sqrt{3}$ y la pendiente en $(-\sqrt{3}, 0)$ es $\sqrt{3}$.

Dado que la función es simétrica respecto al eje de las y, el ángulo que formarán dichas rectas con el eje de las x es el mismo, llamémosle α.

Por otro lado, sabemos que $\tan\alpha$ es igual a la pendiente de la recta. Es decir,

$$\tan\alpha = \sqrt{3}$$

Luego el ángulo pedido será α = $\tan^{-1}(\sqrt{3}) = 60^{\circ}$

Opción 2

1. Calculas las integrales indefinidas siguientes:

$$a)\ \int \frac{\ln x}{(x+1)^2}dx$$

$$b)\ \int \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$$

a) Realizamos una integral por partes, seleccionando lo siguiente:

$$u = lnx \qquad du = \frac{1}{x}dx$$

$$dv = \frac{1}{(1+x)^2}dx \qquad v = -\frac{1}{1+x}$$

Por lo tanto:

$$\frac{-\ln x}{x+1} + \int \frac{1}{x+1}\cdot\frac{1}{x}dx =$$

Tomamos integrales racionales:

$$\frac{-\ln x}{x+1} + \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{1}{x+1}dx$$

Resolvemos:

$$\frac{-\ln x}{x+1} + \ln|x| - \ln|x+1| + c \qquad \forall C \in \mathbb{R}$$

b) Realizamos una integral por partes, seleccionando lo siguiente:

$$u = xe^x \qquad du = (e^x + xe^x)dx$$

$$dv = \frac{1}{(1+x)^2}dx \qquad v = -\frac{1}{1+x}$$

Por lo tanto:

$$\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx = \frac{-xe^x}{1+x} - \int -\frac{1}{1+x}\cdot(e^x + xe^x)\,dx$$

Si sacamos factor común:

$$\frac{-xe^x}{1+x} + \int \frac{1+x}{1+x}\cdot(e^x)\,dx = \frac{-xe^x}{1+x} + \int e^x\,dx = \frac{-xe^x}{1+x} + e^x + C \qquad \forall C \in \mathbb{R}$$

2. Se ha realizado un estudio de valoración de un determinado candidato político, tomando una muestra de 80 hombres y 120 mujeres, con los siguientes resultados (dados en función de un parámetro real $\delta \in \mathbb{R}$)

	Hombres	Mujeres	Total
Valoraciones positivas	50 - δ	40 + δ	90
Valoraciones negativas	30 + δ	80 - δ	110
Total	80	120	200

Si se elige una persona al azar de entre la muestra, calcular las probabilidades de los siguientes sucesos:

a) Sabiendo que es hombre, que tenga una valoración positiva del candidato.

b) Que sea hombre y favorable al candidato

c) Que sea mujer o que esté a favor del candidato

d) ¿Qué valor debe tener el parámetro δ para que los sucesos "ser mujeres" y "no estar a favor del candidato" sean independientes?

Tomamos + como valoración positiva y – como valoración negativa. Tomamos "ser hombre" como H y "ser mujer" como M. Por lo tanto:

$$a)\ p(+/H) = \frac{50-\delta}{80}$$

$$b)\ p(H \cap +) = p(H)\cdot p(+/H) = \frac{80}{200}\cdot\frac{50-\delta}{80} = \frac{50-\delta}{200}$$

$$c)\ p(MU+) = p(M) + p(+) - [p(M)\cdot p(+/M)] = \frac{120}{200} + \frac{90}{200} - \frac{120}{200}\cdot\frac{40+\delta}{120} = \frac{210-40+\delta}{200} = \frac{170+\delta}{200}$$

$$d)\ p(M \cap -) = p(M)\cdot p(-/M) = \frac{120}{200}\cdot\frac{80-\delta}{120} = \frac{80-\delta}{200}$$

$$p(M)\cdot p(-) = \frac{120}{200}\cdot\frac{110}{200} = \frac{66}{200} \qquad \rightarrow \qquad \frac{80-\delta}{200} = \frac{66}{200} \qquad \rightarrow \quad \delta = 14$$

Luego, para que sean independientes delta debe valer 14